Corso di Algebra booleana

4-Applicazioni dell'algebra di Boole

Prerequisiti

- Concetti elementari di:
  - logica proposizionale
  - teoria degli insiemi
  - calcolo delle probabilità
  - circuiti elettrici
  - reti logiche
  - programmazione

Introduzione

Partendo dalle basi della logica aristotelica, che studiava le proposizioni ed i loro legami logici, George Boole formulò una teoria più astratta che porta il suo nome, che comprendeva non solo la logica delle proposizioni, ma anche molti campi scientifici, come descriviamo in questa Unità.

Le applicazioni dell'algebra binaria

L'algebra binaria, o algebra di Boole, è applicabile in molte situazioni in cui si hanno 2 soli possibili stati o valori: vero o falso, 0 oppure 1, e così via.

Esempio: una lampadina può essere accesa (a questo evento si associa il valore *1* o *vero*) oppure spenta (valore *0* o *falso*).

Queste situazioni possono essere trattate con gli assiomi dell'algebra binaria e con le sue operazioni.

Le applicazioni dell'algebra binaria

Diamo qua una panoramica generale, rimandando ciascun argomento ai corsi specifici.

Ricordiamo che una teoria assiomatica si costruisce su:

- elementi, termini e simboli **primitivi**;
- **operazioni** (con proprietà e regole di precedenza tra gli operatori)
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**.

L'algebra delle proposizioni

L'**algebra delle proposizioni** si basa sulla **logica proposizionale**, nata con Aristotele, cui abbiamo fatto riferimento più volte. In questo caso, abbiamo:

- elementi, termini e simboli **primitivi** appartenenti ad un insieme B;
  - il concetto di **proposizione**, indicata con una lettera detta **variabile proposizionale**;
  - le **costanti Vero** e **Falso** (il valore di una proposizione)
- operatori:
  - **congiunzione** (connettivo "e"), **disgiunzione** (connettivo "o") e **negazione** (connettivo "non"), **implicazione** (connettivo →), **doppia implicazione** (connettivo ←→)
  - **regole di precedenza** tra gli operatori
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**.

L’algebra delle proposizioni

In questa algebra valgono le seguenti proprietà:

- se a, $b \in B$, anche $a + b \in B$, $a \,\&\, b \in B$
- se $a \in B$, anche $\sim a \in B$
- $a + \sim a = 1$ (Vero)
- $\sim(a + \sim a) = 0$ (Falso)

La teoria degli insiemi

La **teoria degli insiemi** si fonda sull’algebra booleana e pertanto troviamo:

- elementi, termini e simboli **primitivi** appartenenti ad un insieme B:
  - il concetto di **insieme,** di elemento e quello di **appartenenza** di un elemento ad un insieme;
  - le **costanti**: l’**insieme vuoto,** associato al valore **Falso**, l’**insieme universo** al valore **Vero**.
- operatori:
  - **congiunzione** (intersezione “$\cap$”), **disgiunzione** (unione “$\cup$”) e **negazione** (complementare “$\mathscr{C}$”), **implicazione** (relazione di contenimento “$\subseteq$”), **equivalenza** (“$\leftarrow\rightarrow$”)
  - **regole di precedenza** tra gli operatori
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**.

La teoria degli insiemi

In questa algebra valgono le seguenti proprietà:

- se a, $b \in B$, anche $a \cup b \in B$, $a \cap b \in B$
- se $a \in B$, anche $\mathcal{C}(a) \in B$
- $a \cup \mathcal{C}(a) = 1$ (Vero, insieme universo)
- $\mathcal{C}(a \cup \mathcal{C}(a)) = 0$ (Falso, insieme vuoto)

L'algebra dei contatti

L'**algebra dei circuiti,** basata sul passaggio o meno di corrente in un circuito elettrico, per cui viene anche detta **algebra dei contatti**, è interpretabile come algebra booleana, per cui possiamo riconoscere:

- elementi, termini e simboli **primitivi** appartenenti ad un insieme B:
  - il concetto di **circuito**, di **interruttore e** quello di **passaggio** di corrente in un circuito;
  - le **costanti**: il **non** passaggio di corrente**,** associato al valore **Falso**, il passaggio di corrente associato al valore **Vero**.
- operatori:
  - **congiunzione** (interruttori in serie "&"), **disgiunzione** (interruttori in parallelo "+"), la **negazione** (apertura di un interruttore "~")
  - **regole di precedenza** tra gli operatori
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**.

L’algebra dei contatti

In questa algebra valgono le seguenti proprietà:

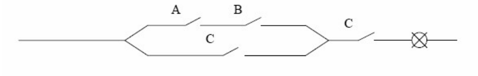
- se a, b є B, anche $a + b$ є B, a & b є B
- se a є B, anche ~ a є B
- a + ~a =1 (Vero, la corrente passa)
- ~(a + ~a) = 0 (Falso, la corrente non passa)

La nascita dell’algebra booleana risale all’incirca al 1850, ma ssolo intorno al 195 Shannon che, essendo impegnato in studi sulla semplificazione dei circuiti a relè prevalentemente usata in telefonia, ebbe l’idea di associare i circuiti elettronici ad espressioni analitiche. La semplificazione dell’espressione analitica di un circuito, consentì di semplificare anche i circuiti a relè.

L’algebra dei contatti

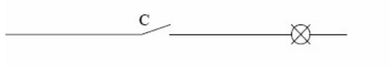
Un esempio di semplificazione può essere il seguente:

(A & B +C) & C



Questo è il circuito che corrisponde all’espressione data

A & B & C + C & C = C & (A&B + 1) = C



Questo è il circuito semplificato equivalente

La teoria delle probabilità

La **teoria delle probabilità** è basata sul fatto che un evento possa presentarsi o meno, per cui può essere trattata con li assiomi di Boole. Abbiamo:

- elementi, termini e simboli **primitivi** appartenenti ad un insieme B:
  - il concetto di **evento**, di **appartenenza** ad un insieme di eventi possibili (spazio campionario);
  - le **costanti**: l'evento **impossibile**, associato al valore **Falso**, l'evento **certo** associato al valore **Vero**.
- operatori:
  - **congiunzione** (evento prodotto di due eventi "&"), la **disgiunzione** (evento somma di due eventi "+"), la **negazione** (evento complementare, "~"), **implicazione** (relazione di contenimento "⊆"), **equivalenza** ("←→")
  - **regole di precedenza** tra gli operatori
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**

La teoria delle probabilità

In questa algebra valgono le seguenti proprietà:

- se a, b ϵ B, anche $a + b$ ϵ B, a & b ϵ B
- se a ϵ B, anche ~ a ϵ B
- a + ~a =1 (Vero, evento certo)
- ~(a + ~a) = 0 (Falso, evento impossibile)

Variabili logiche in Informatica

In p**rogrammazione** si usano le variabili logiche che seguono l'algebra di Boole. In questo caso, abbiamo:

- elementi, termini e simboli **primitivi** appartenenti a un insieme B:
  - il concetto di **variabile**, indicata con un nome;
  - le **costanti True** e **False**
- operatori:
  - **congiunzione** (connettivo "&"), **disgiunzione** (connettivo "||") e **negazione** (connettivo "!"), **implicazione** (**Se…allora**…)
  - **regole di precedenza** tra gli operatori
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**.

Variabili logiche in Informatica

In questa algebra valgono le seguenti proprietà:

- se a, b ϵ B, anche a || b ϵ B, a & b ϵ B
- se a ϵ B, anche ! a ϵ B
- a + ! a =1 (Vero)
- ! (a + ! a) = 0 (Falso)

Le reti logiche

Le **reti logiche** sono circuiti particolari composti da **porte logiche**, i quali operano su ingressi ed uscite di corrente, secondo una logica binaria.

In questo caso, abbiamo:

- elementi, termini e simboli **primitivi** appartenenti ad un insieme B:
  - il concetto di **circuito logico**, di **porta** logica e di **livello di tensione**;
  - le **costanti Vero** e **Falso**, associate rispettivamente al livello di tensione **alto** oppure **basso**;
- operatori:
  - **congiunzione** (porta logica **AND**), **disgiunzione** (porta logica **OR**) e **negazione** (porta logica **NOT**), **implicazione** (connettivo →), **doppia implicazione** (connettivo ←→)
  - **regole di precedenza** tra gli operatori
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**, in analogia alla logica booleana.

Le reti logiche

In questa algebra valgono le seguenti proprietà:

- se *a*, *b* є B, anche *a* **OR** *b* є B, *a* **AND** *b* є B
- se *a* є B, anche **NOT** *a* є B
- a OR **NOT**(a) =1 (Vero)
- **NOT**(a **OR** **NOT**(a)) = 0 (Falso)

Argomenti

- Le applicazioni dell'algebra binaria
- L'algebra delle proposizioni
- La teoria degli insiemi
- L'algebra dei contatti
- La teoria delle probabilità
- Variabili logiche in Informatica
- Le reti logiche

Altre fonti di informazione

- Algebra di Boole, Encyclopædia Britannica, Inc.
- Opere riguardanti Algebra di Boole, su Open Library, Internet Archive.
- Introduzione all'algebra Booleana, su isgroup.unimo.it.
- Panoramica sull'Algebra Booleana, su wwwusers.di.uniroma1.it
- http://www.elemania.altervista.org/digitale/index.html
- Sergio Congiu, "Calcolatori Elettronici", Pàtron Editore, 1998.