Corso di Algebra booleana

3 – I connettivi logici

Prerequisiti

- Concetto di variabile
- Tabelle delle operazioni binarie

Introduzione

Il fatto che una proposizione possa essere vera o falsa non era il reale interesse di Boole, quanto la possibilità di collegare o "connettere" le proposizioni tra loro per ottenere una **proposizione composta**,come vedremo tra breve.
Rimandiamo lo studio della **logica proposizionale** ad un apposito corso: sviluppiamo nel presente corso i concetti di base dell'algebra di Boole

Connettivi logici e variabili logiche

Come accennato in precedenza, l'algebra booleana utilizza come elementi i soli due valori 0 ed 1, in luogo delle proposizioni logiche. Descriviamo allora i **connettivi logici**, o brevemente **connettivi**, che servono, come accennato in precedenza, a "connettere" tra loro questi elementi.

> Nel seguito, consideriamo gli elementi da connettere chiamandoli con lettere minuscole, ad esempio *p*, *q*, *r* e così via.
>
> Anticipiamo che questi elementi vanno sotto il nome di **variabili logiche**, ossia di variabili che possono assumere solo il valore **0** o il valore **1**.

I connettivi logici

I **connettivi logici** operano in modo simile a come gli operatori aritmetici operano con i numeri (es: 4 + 2, 6 / 3 - 1, …).

I connettivi logici che esaminiamo sono i seguenti:

- **Congiunzione**
- **Disgiunzione**
- **Negazione**
- **Implicazione**
- **Doppia implicazione**

Sebbene esistano anche altri connettivi, per ora ci limitiamo ad introdurre questi che sono quelli di uso più frequente. Nel seguito incontreremo anche altri connettivi.

Stabiliamo fin d'ora che il valore logico 0 è associato al valore **falso**, mentre il valore logico 1 è associato al valore **vero**.

Congiunzione
- definizione

La **congiunzione**, indicata con il simbolo &, di due variabili *p* e *q* si indica con *p* & *q* e risulta **vera** solo se entrambe le variabili sono vere.

La definizione di un connettivo si può esprimere sinteticamente mediante la sua **tabella di verità** mostrata di seguito.

Trattandosi di una definizione, essa va accettata così com'è, e pertanto i valori in tabella non sono altro che applicazioni della definizione.

p	***q***	***p & q***
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Congiunzione
- osservazioni

- & è un connettivo **binario** o **biargomentale** (agisce su due argomenti)
- L'operatore "&" gode delle seguenti proprietà:
  - **proprietà commutativa**: $p \,\&\, q = q \,\&\, p$
  - **proprietà associativa**: $(p \,\&\, q) \,\&\, r = p \,\&\, (q \,\&\, r)$
  - **idempotenza**: $p \,\&\, p = p$
- L'operatore & è talvolta chiamato **prodotto logico**, per la sua analogia con l'operatore di moltiplicazione binaria, come si può verificare scrivendo la relativa tabella.
- L'operatore & viene indicato anche con **AND** o con il simbolo "·".

Disgiunzione
- definizione

La **disgiunzione**, indicata con il simbolo +, di due variabili p e q si indica con $p + q$ e risulta **vera** solo se almeno una delle due è vera.

La definizione della disgiunzione mediante la sua **tabella di verità** è quella mostrata di seguito.

p	***q***	$\boldsymbol{p + q}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disgiunzione
- osservazioni

- + è un connettivo **binario** o **biargomentale** (agisce su due argomenti)
- L'operatore + gode delle seguenti proprietà:
  - **proprietà commutativa**: p + $q = q + p$
  - **proprietà associativa**: $(p + q) + r = p + (q + r)$
  - **idempotenza**: $p + p = p$
  - **proprietà distributive**:
    - $p \;\&\; (q + r) = (p \;\&\; q) + (p \;\&\; r)$
      (proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma)
    - $(p + (q \;\&\; r) = (p + q) \;\&\; (p + r)$
      (proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto)

Disgiunzione
- osservazioni

  - **leggi di De Morgan**:
    - $\sim(p \;\&\; q) = \sim p + \sim q$
    - $\sim(p + q) = \sim p \;\&\; \sim q$
- L'operatore + è talvolta chiamato **somma logica**, per la sua analogia con l'operatore di addizione binaria, come si può verificare scrivendo la relativa tabella.
- L'operatore + viene indicato anche con **OR** o con "∨".

Negazione
- definizione

La **negazione** indicata con il simbolo ~ di una variabile *p* si indica con ~*p* che risulta **vera** solo se *p* è falsa e viceversa.

La sua **tabella di verità** è la seguente:

p	**~*p***
0	1
1	0

Negazione
- osservazioni

- Si noti che ~ è un connettivo **unario** o **monoargomentale** (agisce su un solo argomento)
- L'operatore ~ gode delle seguenti proprietà:
  - $p = 1 - {\sim}p$
- L'operatore "~" è talvolta chiamato **complemento**, per la sua analogia con l'operatore di complementazione binaria, come si può verificare scrivendo la relativa tabella.
- L'operatore "~" viene indicato anche con **NOT** o con "¬".

Implicazione
- definizione

La **implicazione**, indicata con il simbolo "→", esprime una conseguenza *q* di una data variabile *p*. In particolare p → q si legge "*p implica q*" o "*da p segue q*" oppure "*se p allora q*" e significa "Se si verifica p, **allora** si verifica q" ed avrà valore falso solo se *p* è vera e *q* è falsa.

La sua **tabella di verità** è la seguente:

p	*q*	*p → q*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implicazione
- osservazioni

- Si noti che → è un connettivo **binario** o **biargomentale** (agisce su due argomenti)
- L'implicazione prescinde da qualunque legame causale tra gli argomenti, ciò che conta sono solo i rispettivi valori di verità
- L'operatore → gode della seguente **proprietà transitiva**, detta anche **proprietà del sillogismo**:
  - $(p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r) \;= p \rightarrow r$
- Nell'implicazione $p \rightarrow q$ si dice che "*p* è una condizione sufficiente per *q*" oppure che "*q* è condizione necessaria per *p*".
- La formula a sinistra del simbolo "→" si dice **antecedente**, mentre quella a destra si dice **conseguente**, per ovvi motivi verbali.

Implicazione
- osservazioni

- Il connettivo → è talvolta chiamato **implicazione materiale** o **implicazione condizionale**, poiché esprime una variabile come condizione per il valore logico di un'altra.

Doppia implicazione
- definizione

La **doppia implicazione**, indicata il simbolo "←→", esprime il fatto che due variabili *p* e *q* si implicano reciprocamente. In particolare, *p* ←→ *q* si legge "*p implica q e q implica p*" o "*p equivale a q*" oppure "*se p allora q e viceversa*" e significa "**<u>Se e solo se</u>** si verifica *p*, **<u>allora</u>** si verifica *q* e viceversa" ed avrà <u>valore vero solo se *p* e *q* hanno lo stesso valore di verità</u>.

La sua **tabella di verità** è la seguente:

p	***q***	***p ←→ q***
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Doppia implicazione
- osservazioni

- Si noti che ←→ è un connettivo **binario** o **biargomentale** (agisce su due argomenti)
- Come l'implicazione prescinde da qualunque legame causale tra gli argomenti, ciò che conta sono solo i rispettivi valori di verità
- L'operatore ←→ gode della seguente **proprietà transitiva**, detta anche **proprietà del sillogismo**:
  - $(p \leftrightarrow q)\ \&\ (q \leftrightarrow r) = p \leftrightarrow r$
- Se p ←→q si dice anche che "*p* è una <u>condizione necessaria e sufficiente</u> per *q*".
- La formula a sinistra del simbolo "←→" si dice **antecedente**, mentre quella a destra si dice **conseguente**, per ovvi motivi verbali.
- L'operatore "←→" viene anche detto **equivalenza**, per ovvi motivi.

Argomenti

- Connettivi logici e variabili logiche
- I connettivi logici
- Congiunzione
  - definizione
  - osservazioni
- Disgiunzione
  - definizione
  - osservazioni
- Negazione
  - definizione
  - osservazioni
- Implicazione
  - definizione
  - osservazioni
- Doppia implicazione
  - definizione
  - osservazioni

Altre fonti di informazione

- Algebra di Boole, Encyclopædia Britannica, Inc.
- Opere riguardanti Algebra di Boole, su Open Library, Internet Archive.
- Introduzione all'algebra Booleana, su isgroup.unimo.it.
- Panoramica sull'Algebra Booleana, su wwwusers.di.uniroma1.it
- http://www.elemania.altervista.org/digitale/index.html
- Sergio Congiu, "Calcolatori Elettronici", Pàtron Editore, 1998.