Corso di Algebra booleana

2-Algebra di Boole

Prerequisiti

- Concetto elementare di algebra (insieme, operazioni e loro proprietà)
- Insieme matematico chiuso
- Regole elementari dell'algebra
- Concetto di funzione di una variabile

Introduzione

In questa Unità utilizziamo l'impostazione aristotelica della logica basata sulle proposizioni, per applicarla ad una realtà matematica formata solo da due concetti antitetici: il **vero** e il **falso**, associati rispettivamente ai valori **0** e **1**.

Il celebre matematico e logico britannico G. Boole (1815-1864) trasponendo i concetti della logica aristotelica, basata sulle proposizioni, a quelli di **vero** e **falso**, introdusse una teoria che porta il suo nome: **algebra di Boole**.

In cosa consiste l'Algebra di Boole o algebra binaria?

Perché è importante in diversi campi scientifici teorici e pratici?

La parola "algebra"

La parola "algebra" deriva dalla parola araba *al-giabr*, usata per la prima volta dal matematico arabo **Muhammad Ibn Musa al-Khuwarizmi** (Baghdad, 9° secolo) per indicare l'operazione con cui si passa dall'eguaglianza A−B=C all'eguaglianza A=B+C.

L'algebra moderna poggia sulle basi definite grazie all'intuizione di Boole, il quale sosteneva che il pensiero logico potesse essere decomposto in insiemi di scelte caratterizzate da due sole possibilità. Per questo motivo,l'algebra di Boole viene anche detta **algebra binaria**.

Nel 1940 questa idea venne ripresa e usata per costruire i primi calcolatori elettronici e nella progettazione delle centrali telefoniche

Cos’è un’algebra

Oggi, con il termine “algebra” si intende un sistema formale logico-deduttivo basato su:

- elementi, termini e simboli **primitivi**
- **operazioni** (con proprietà e regole di precedenza tra gli operatori)
- un insieme di affermazioni assunte come vere, dette **assiomi**.

Nel seguito, useremo indifferentemente gli aggettivi “binario” e “booleano”

L’algebra binaria

Un insieme **B** si dice dotato di un’**algebra binaria** quando:

A1) **B** contiene due **elementi** distinti: **B** = {0,1}

A2) In **B** sono definite le **operazioni**:

- **moltiplicazione** (avente **simbolo AND** o &)
- **addizione** (avente **simbolo OR** o +)
- **negazione** (avente **simbolo NOT** o ~)

rispetto alle quali **B** è chiuso

A3) Dati i **termini** $a,b \in$ **B** per le operazioni valgono le **proprietà**:

A4) **Commutativa**: $a + b = b + a$, $a \,\&\, b = b \,\&\, a$

A5) **Associativa**: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

$a \,\&\, (b \,\&\, c) = (a \,\&\, b) \,\&\, c = a \,\&\, b \,\&\, c$

L’algebra binaria

A6) **Distributiva**: *a* + (*a* & *b*) = (*a* + *b*) & (*a* + *c*)
a & (*b* + *c*) = (*a* & *b*) + (*a* & *c*)

A7) **Idempotenza**: *a* + *a* = *a*, *a* & *a* = *a* (**proprietà di assorbimento**)

A8) **Elemento neutro**: *a* + 0 = *a*, *a* & 1 = *a* (**principio di dualità**)

A9) **Inverso**: *a* + ~*a* = 1, *a* & ~*a* = 0 (**proprietà del complemento**)

A10) **Negazione**: ~0 = 1, ~1 = 0

A11) **Annullatore**: *a & 0 = 0, a + 1 = 1*

A12*)* **Leggi di De Morgan**:
(*a* & *b*) = ~*a* + ~*b*, ~(*a* + *b*) = ~*a* & ~*b*

Le proprietà A1)..A12) sono gli assiomi dell’algebra di Boole

Costanti e variabili

I due elementi **0** ed **1** sono assunti come **costanti booleane** per cui il loro valore è immutabile.

Le lettere *a* e *b* sono dette **variabili booleane**, le quali possono assumere solo uno dei due valori 1 o 0, rispettivamente associati agli **Vero** o **Falso**, **on** oppure **off**, **chiuso** o **aperto**

Arità degli operatori

I simboli di operazione &, + e ~ sono detti **connettivi** e si applicano a variabili e costanti per costruire espressioni binarie (v. seguito)

Si dice **arità** di un operatore, il numero degli elementi su cui esso opera, che sono detti **argomenti**.

Esempi:

a + *b*   il "+" (detto anche **disgiunzione**) ha arità 2

~*d*   il "~" (detto anche **negazione**) ha arità 1

a & *b*   il "&" (detto anche **congiunzione**) ha arità 2

> Gli operatori "+" e "&" sono anche detti **binari** o **biargomentali**, mentre il "~" è anche detto **unario** o **monoargomentale**

Precedenza degli operatori

Per gli operatori valgono le seguenti **regole di precedenza** (necessarie per poter valutare un'espressione):

- le operazioni unarie hanno la precedenza su quelle binarie;
- l'operazione binaria "&" ha la precedenza su quella "+";
- le parentesi hanno la precedenza.

Proprietà dell'algebra di Boole

In questa algebra valgono le seguenti proprietà:

- se a, b ϵ K, anche $a + b$ ϵ K, a & b ϵ K
- se a ϵ K, anche $\sim a$ ϵ K
- a + ~a =1
- ~(a + ~a) = 0

Espressioni

Un'**espressione binaria**, che chiameremo d'ora in avanti semplicemente **espressione**, è una sequenza di costanti e variabili, legati dai connettivi, secondo una precisa sintassi.

Esempi:

$(a + b)$ & $(c + d)$

$a +$ $(b$ & $c) + \sim d$

Il **valore** di un'espressione (pari a 0 o 1) dipende dai valori delle variabili e delle costanti e si valuta tramite le **tabelle di verità** dei connettivi presenti.

Una costante o una variabile si dicono **espressioni semplici**, mentre se sono presenti connettivi si dice **espressione composta**.

Espressioni
- definizione

Siamo ora in grado di definire correttamente un'espressione.

Un'**espressione binaria**, che chiameremo d'ora in avanti **espressione**, è una costante, o una variabile (espressioni semplici) o un operatore fra espressioni.

Esempi:

Operatore tra le espressioni *c* e *d*

$(a + b)\ \&\ (c + d)$

Operatore tra le due espressioni in parentesi

Operatore tra le espressioni *a* e *b*

Espressioni
- esempi

Calcoliamo il valore della seguente espressione, utilizzando tutte le possibili combinazioni dei valori delle variabili.

$r = \sim(\ (\ p + q)\ \&\ (\sim p\ )\ )$

p	*q*	*p + q*	*~p*	*(p+q) & (~p)*	*~(p+q) & (~p)*
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Espressioni
- esempi

Calcoliamo il valore della seguente espressione, utilizzando tutte le possibili combinazioni dei valori delle variabili.

$s = p \ \& \ q + \sim r = (p \ \& \ q) + (\sim r)$

p	*q*	*r*	*p&q*	*~r*	*(p&q) + (~r)*
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Espressioni
- esempi

Calcoliamo il valore della seguente espressione, utilizzando tutte le possibili combinazioni dei valori delle variabili.

$s = p + (q \ \& \ r)$

p	*q*	*r*	*q&r*	*p + (q&r)*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Espressioni
- esempi

Calcoliamo il valore della seguente espressione, utilizzando tutte le possibili combinazioni dei valori delle variabili.

$s = p \,\&\, (q + (\sim r))$

p	*q*	*r*	*~r*	*q+(~r)*	*p & (q+(~r))*
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Principio di dualità

Il **principio di dualità** (vedi assioma A8) rappresenta anche una notevole proprietà delle espressioni booleane.

Principio di dualità: ogni espressione binaria resta valida se si scambiano tra di loro gli operatori & e + e gli elementi 0 e 1. L'espressione ottenuta con un tale scambio si dice **espressione duale** della data.

Esempi:

$a + 0 = a$ ha come duale $a \,\&\, 1 = a$

$a + \sim a = 1$ ha come duale $a \,\&\, \sim a = 0$

Tautologia

Si dice **tautologia** un'espressione booleana che e sempre vera, per qualunque combinazione di valori delle variabili.

Esempio:

a + ~a = 1 rappresenta il **principio del terzo escluso**, ossia "non è possibile che si verifichi *a* e la sua negazione"

Contraddizione

Si dice **contraddizione** un'espressione booleana che e sempre falsa, per qualunque combinazione di valori delle variabili.

Esempio:

a & ~a = 0 rappresenta il **principio del terzo escluso**, ossia "non è possibile che si verifichi a e la sua negazione"

Equivalenza

Due variabili logiche *p* e *q* si dicono **equivalenti**, e si indica con *p*←→*q*, se hanno la medesima tabella di verità.

A titolo di esempio, verifichiamo una delle due leggi di De Morgan

Esempio:

$\sim p \ \& \sim q \leftrightarrow \sim(p + q)$

p	*q*	*~p*	*~q*	*~p&~q)*	*~(p+q)*
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Minimizzazione

Le varie proprietà dell'algebra binaria, consentono di manipolare qualunque espressione in modo da ottenerne una equivalente, ma contenente il numero minimo di argomenti.

Questo procedimento, detto **minimizzazione**, ha ovviamente risvolti pratici di grande interesse.

Vediamo come applicando le proprietà dell'algebra booleana, sia possibile ottenere la forma minimizzata di un'espressione data.

Minimizzazione

Trasformare la seguente espressione logica in modo da minimizzarla.

~p & ~q + p =	in base alla proprietà di idempotenza
= ~p & q + (p + p & q) =	si tolgono le parentesi rispettando la precedenza
= ~p & q + p + p & q =	si applica la proprietà commutativa
= ~p & q + p & q + p =	si applica la proprietà distributiva
= (~p + p) & q + p =	elemento neutro
= 1 & q + p = q + p	

Come si può verificare, l'espressione finale è stata semplificata rispetto a quella data e la conferma della loro equivalenza si può ottenere tramite le rispettive tabelle di verità.

Funzioni booleane
- definizione

Tramite il concetto di espressione booleana, possiamo definire una **funzione booleana di *N* variabili** come:

$$F = f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \qquad F, p_i \in B = \{0, 1\}$$

dove F rappresenta il valore logico dell'espressione f, dati gli n valori logici delle variabili p_i.

Funzioni booleane
- combinazioni delle variabili

Sappiamo che per *n* variabili il numero delle loro combinazioni è 2^n.

Pertanto:

- per 1 variabile avremo $2^1 = 2$ combinazioni (0 ed 1)
- per 2 variabili avremo $2^2 = 4$ combinazioni (00, 01, 10 e 11)
- per 3 variabili avremo $2^3 = 8$ combinazioni (000, 001, 010, 011, …, 111)

Funzioni booleane
- combinazioni delle funzioni

Per ciascuna di queste combinazioni, possiamo avere che la funzione vale 0 oppure 1 e quindi:

- per 1 variabile avremo $2^2 = 4$ funzioni di 1 variabile
- per 2 variabili avremo $2^4 = 16$ funzioni di due variabili
- per 3 variabili avremo $2^8 = 256$ funzioni di 3 variabili

In generale, per *n* variabili avremo $y = 2^n$ combinazioni e quindi 2^y funzioni di *n* variabili.

Vediamo, in particolare, due casi di esempio.

Funzioni booleane
- funzione di una variabile

Supponiamo di avere una sola variabile $p \in B = \{0, 1\}$, si possono presentare i seguenti casi per la funzione $F = f(p)$

1. la F vale sempre 0, sia quando $p = 0$, che quando $p = 1$
2. la F vale sempre 1, sia quando $p = 0$, che quando $p = 1$
3. la F vale 0 quando $p = 0$
4. la F vale 1 quando $p = 0$

In figura è rappresentata la tabella

di verità relativa

p	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Funzioni booleane
- funzione di una variabile

Possiamo giungere alle seguenti conclusioni:

1. f_0 è sempre 0 e prende il nome di **costante 0**.

2. f_1 è sempre 1 e quindi prende il nome di **costante 1**

3. f_2 è sempre concorde con p e prende il nome di **identità**

4. f_3 è sempre discorde con p e prende il nome di **negazione**

p	$f0$	$f1$	$f2$	$f3$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Funzioni booleane
- funzione di due variabili

Passiamo all'esempio di funzione *F* di 2 variabili

$$F = f(p_1, p_2)$$

Avremo 2^2 combinazioni delle variabili e 2^4 valori possibili per *F*, come mostrato nella seguente tabella di verità:

x_0	x_1	f_0	f_{15}	f_3	f_5	f_{12}	f_{10}	f_1	f_{14}	f_7	f_8	f_9	f_6	f_{13}	f_2	f_{11}	f_4
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Funzioni booleane
- funzione di due variabili

Anche in questo caso ciascuna f_i ha una caratteristica particolare:

1. f_0 è sempre 0 ed è la **costante 0**.
2. f_{15} è sempre 1 e prende il nome di **costante 1**.
3. f_3 ed f_5 rappresentano l'**identità**
4. f_{12} ed f_{10} rappresentano la **negazione**.

x_0	x_1	f_0	f_{15}	f_3	f_5	f_{12}	f_{10}	f_1	f_{14}	f_7	f_8	f_9	f_6	f_{13}	f_2	f_{11}	f_4
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Funzioni booleane
- funzione di due variabili

Anche in questo caso ciascuna f_i ha una caratteristica particolare:

1. f_1 rappresenta la **congiunzione** (AND)
2. f_{14} rappresenta la **negazione della congiunzione** (**NAND) (*)**
3. f_7 rappresenta la **disgiunzione** (**OR)**
4. f_8 rappresenta a **negazione della disgiunzione** (**NOR**) (*)

x_0	x_1	f_0	f_{15}	f_3	f_5	f_{12}	f_{10}	f_1	f_{14}	f_7	f_8	f_9	f_6	f_{13}	f_2	f_{11}	f_4
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Funzioni booleane
- funzione di due variabili

… segue

1.f_9 rappresenta l'**equivalenza (←→)**

2.f_6 rappresenta la **disgiunzione esclusiva** (**XOR**) (*)

3.f_{13} , f_2 , f_{11} , f_8 rappresentano **implicazione** (→)

(*) Queste f

x_0	x_1	f_0	f_{15}	f_3	f_5	f_{12}	f_{10}	f_1	f_{14}	f_7	f_8	f_9	f_6	f_{13}	f_2	f_{11}	f_4
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Altri operatori booleani

Esistono altri operatori booleani spesso utilizzati nelle reti logiche come:

- NAND
- NOR
- XOR
- XNOR

per cui rimandiamo al rispettivo corso il loro studio.

Argomenti

- La parola “algebra”
- Cos’è un’algebra
- L’algebra binaria
- Costanti e variabili
- Arità degli operatori
- Precedenza degli operatori
- Proprietà dell’algebra di Boole
- Espressioni
  - definizione
  - esempi
- Principio di dualità
- Tautologia
- Contraddizione
- Equivalenza
- Minimizzazione
- Funzioni booleane
  - definizione
  - combinazioni delle variabili
  - combinazioni delle funzioni
  - funzione di una variabile
  - funzione di due variabili
- Altri operatori booleani

Altre fonti di informazione

- Algebra di Boole, Encyclopædia Britannica, Inc.
- Opere riguardanti Algebra di Boole, su Open Library, Internet Archive.
- Introduzione all’algebra Booleana, su isgroup.unimo.it.
- Panoramica sull'Algebra Booleana, su wwwusers.di.uniroma1.it
- http://www.elemania.altervista.org/digitale/index.html
- Sergio Congiu, “Calcolatori Elettronici”, Pàtron Editore, 1998.