

Corso di Algebra booleana

1 – Introduzione

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

1
22/05/2023

Prerequisiti

- Concetto di teoria assiomatica
- Concetti intuitivi di proposizione, ragionamento deduttivo, sillogismo, argomentazione, ragionamento sofisticato

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

2
22/05/2023

Per iniziare ...

“C'è qualcosa di più importante della logica: è l'immaginazione.”

Alfred Hitchcock

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

3
22/05/2023

Introduzione

Iniziamo il nostro studio partendo da una branca della logica matematica detta **logica proposizionale**, in quanto studia i legami logici creati tra le proposizioni espresse in lingua naturale (per noi italiano).

Poiché le proposizioni sono espresse in lingua naturale, lo studio ne risulterà più familiare.

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

4
22/05/2023

La nascita della logica

La logica nasce nella Grecia classica con gli studi di **Aristotele** (384 -322 a.C.). Si può confrontare ciò che fece **Euclide** (300 a.C.) nella Matematica e nella Geometria, con il lavoro di Aristotele sulla logica.

Euclide scrisse il noto testo “Elementi”, in cui sistemò in modo razionale e assiomatico gli enti e le proprietà geometriche; analogamente, Aristotele, nella sua opera “Organon” (in gr. “strumento”) pose le basi della logica, introducendo i concetti di:

- proposizione
- ragionamento deduttivo
- sillogismo
- argomentazione
- ragionamento sofistico

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

5
22/05/2023

Scopo della logica

Dopo un lungo periodo di pausa, nuovo impulso ebbe lo studio della logica nel Medio Evo (**Pietro Abelardo**, 1079-1142) che portò a stabilire la reale finalità di essa: stabilire la verità o la falsità di un discorso scientifico, prescindendo da considerazioni di tipo:

- grammaticale;
- retorico
- psicologico
- metafisico.
- semantico.

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

6
22/05/2023

Uso della logica

La logica studia le strutture e le regole del discorso, affinché chi le usa possa ottenere conclusioni “persuasive” partendo da premesse ben definite.

Discipline come la Matematica, la Giurisprudenza e la Filosofia si avvalgono della logica matematica, infatti, ad esempio:

- un avvocato espone alla corte un collegamento logico di fatti (premesse) per ottenere conclusioni convincenti;
- un matematico dimostra un teorema, usando da certe ipotesi (premesse) e ragionamenti logici per giungere alla tesi;
- un filosofo sviluppa i suoi ragionamenti, partendo da alcune premesse e giungendo, tramite passaggi logici, ad una conclusione.

Molti matematici e filosofi dell’antichità, si dilettevano in dispute verbali nelle quali l’abilità logica designava il vincitore.

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

7
22/05/2023

La logica aristotelica

I caposaldi della logica descritti da Aristotele, sono ancor oggi considerati validi:

- **principio di non contraddizione**
- **principio del terzo escluso**
- **concetto di sillogismo**

Kant nel ‘700 scrisse che la logica era “una dottrina conclusa e completa”.

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

8
22/05/2023

La logica aristotelica

- il principio di non contraddizione

Il **principio di non contraddizione**, esprime il fatto che una proposizione e il suo contrario non possono essere contemporaneamente vere.

Ad esempio, le due proposizioni “Oggi è martedì” e “Oggi non è martedì” non possono essere entrambe vere.

La logica aristotelica

- il principio del terzo escluso

Il **principio del terzo escluso**, esprime il fatto che una proposizione può essere **vera** o **non vera** (suo contrario) e non può esserci una terza possibilità.

Ad esempio, la proposizione “ $a+b=c$ ” può essere vera se $a=2$, $b=3$ e $c=5$, o falsa se $a=3$, $b=3$, $c=5$, ma non ci sono altre possibilità.

La logica aristotelica

- il sillogismo

Il **concetto di sillogismo**, esprime un ragionamento “concatenato”, ad esempio “Se a è fratello di b e b è fratello di c , allora a è fratello di c ”

Celebri sono i sillogismi seguenti:

- “Tutti gli Ateniesi hanno la barba, Socrate è Ateniese, quindi Socrate ha la barba”
- “Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo, quindi Socrate è mortale”

La logica aristotelica

- regole di deduzione

Crisippo (280-205 a.C.) contribuì alla logica aristotelica, dando un ulteriore impulso allo studio di strumenti di ragionamento.

- È possibile raggiungere nuove conoscenze attraverso la logica.
- **Regole di deduzione logica:**
 - *modus ponendo ponens* (modo che afferma), che si esprime con la proposizione “Se ogni volta che si verifica a si verifica b , e si è verificato a , allora si è verificato anche b ”.
 - *modus tollendo tollens* (modo che nega), che si esprime con la proposizione “Se ogni volta che si verifica a si verifica b e non si è verificato b , allora non si è verificato a ”.

Logica vista come matematica

Nel periodo dal '500 al '600 lo studio della logica fu di nuovo accantonato e, tranne alcune impostazioni tipicamente aristoteliche, fu orientato sugli aspetti retorici, anziché su quelli formali.

Nel '700, **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-1716), matematico, logico, filosofo, giurista tedesco, concepì il ragionamento come una forma di calcolo, un "*pensare in modo matematico*".

Ad esempio se:

$\langle \text{animale} \rangle = 2$ e $\langle \text{razionale} \rangle = 3$,

allora la proposizione

$\langle \text{l'uomo è un animale razionale} \rangle$

vale 5.

Si comincia, cioè, a fare uso di simboli numerici anche nei processi tipicamente verbali.

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

13
22/05/2023

Logica come teoria assiomatica

Per Leibniz la logica deve essere fondata su:

- riduzione del ragionamento a semplice calcolo;
- costruzione di un sistema deduttivo in cui fosse definito e dimostrato tutto, ad eccezione dei termini primitivi e degli assiomi, in altre parole una teoria assiomatica del ragionamento.

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

14
22/05/2023

L'algebra booleana

Il matematico inglese G. Boole (1815-1864), interessato allo studio dei legami logici tra le proposizioni (ambito di studio detto appunto *logica proposizionale*), riprese gli studi di Leibniz e formalizzò una teoria assiomatica ancor oggi valida e diffusamente applicata, che porta il suo nome: l'**algebra booleana**, di cui ci occuperemo nelle successive Unità; Boole divenne conosciuto per la pubblicazione del suo libro "*The Mathematical Analysis of Logic*".

In questa algebra, si astrae dal concetto di proposizione e si utilizza una realtà nella quale esistono solo due valori: lo 0 e l'1, assunti rispettivamente come **falso** e come **vero**.

Logica e Informatica

Fu opera, infine, di **Giuseppe Peano** (1858-1932) e di **Gottlob Frege** (1848-1925), matematici e logici di grande fama, la formulazione di una logica che non servisse solo alla matematica, ma che avesse una utilità del tutto generale: nasce la **logica matematica**.

Sebbene inizialmente poco apprezzata, l'algebra di Boole si rivelò in seguito, grazie agli studi di **Claude Shannon** (1916-2001), uno strumento ideale nell'ambito del calcolo automatico, aprendo la strada alla moderna **Scienza dell'Informazione**.

Continuiamo il nostro percorso affrontando lo studio dell'algebra booleana, strumento utile nel mondo delle proposizioni, ma anche in molte altre discipline.

Argomenti

- Per iniziare...
- La nascita della logica
- Scopo della logica
- Uso della logica
- La logica aristotelica
 - il principio di non contraddizione
 - il principio del terzo escluso
 - il sillogismo
 - regole di deduzione
- Logica vista come matematica
- Logica come teoria assiomatica
- L'algebra booleana
- Logica e Informatica

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

17
22/05/2023

Altre fonti di informazione

- Algebra di Boole, Encyclopædia Britannica, Inc.
- Opere riguardanti Algebra di Boole, su [Open Library](#), [Internet Archive](#).
- Introduzione all'algebra Booleana, su [isgroup.unimo.it](#).
- Panoramica sull'Algebra Booleana, su [wwwusers.di.uniroma1.it](#)
- <http://www.elemania.altervista.org/digitale/index.html>
- Sergio Congiu, "Calcolatori Elettronici", Pàtron Editore, 1998.

M. Malatesta - 1-Introduzione-04

18
22/05/2023